《高职应用数学》教案 1

课程名称：高职应用数学
总学时：32

课程章节	2.1　极限的概念	课时分配	2
教学目标	1.知识目标：掌握极限思想及简单的极限运算 2.能力目标：会将与极限相关的实际问题与理论知识相联系，提升解决实际问题的能力和自主学习能力		
教学重点、难点	1. 极限的概念和左极限与右极限的概念及应用 2. 无穷大与无穷小的比较		
教学总体设计	1.复习旧课：引导学生集体复习函数的概念、性质和类型。 2.引入新课和概念讲授：用《庄子·天下》里的“一尺之锤，日取其半，万世不竭”引出数列概念，进而引出数列极限的概念；举两个求数列极限的例子引导学生计算数列的极限；将数列通项与函数作对比，引导学生认识函数与数列之间的关系，进而引出函数极限；根据函数与数列的本质区别，举例引导学生通过数形结合掌握自变量趋于无穷和自变量趋于有限值时函数的极限。 3.实操练习：列举典型数列和函数极限，对表现积极的同学加分（鼓励小组讨论和上黑板演示，无关正误）。 4.归纳总结：极限思想的重述及数列和函数极限的相关性概述 5.布置作业：简单的极限计算.		
教学过程	**2.1 极限的概念** 一、数列的极限 **定义 1**　在某一法则下，当 n $(n\in\mathbf{N}^+)$ 依次取 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 时，对应的实数排成一列数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$，这列数就称为数列，记作 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的一般项或通项. 数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为整数 n 的函数 $x_n=f(n)$，它的定义域是全体正整数，当自变量 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 等一切正整数时，对应的函数值就排列成数列 $\{x_n\}$. **定义 2**　对于数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时，如果数列的一般项 x_n 无限地接近于某一确定的数值 a，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$；如果数列没有极限，则称数列是发散的. 二、函数的极限 数列是一种特殊的函数 $x_n=f(n)$，它研究当自变量 $n\to\infty$ 时，函数值 $f(n)$ 的变化趋势．对于一般函数 $y=f(x)$，也可讨论自变量 x 在某一变化过程中函数 $f(x)$ 的变化趋势．函数自变量 x 的变化过程可分为两种情况：x 的绝对值 $\lvert x\rvert$ 无限增大，x 无限接近 x_0．为了方便起见，我们规定： ① x 的绝对值 $\lvert x\rvert$ 无限增大用记号 $x\to\infty$ 表示；		

x 小于 0 且绝对值 $|x|$ 无限增大用记号 $x \to -\infty$ 表示；

x 大于 0 且绝对值 $|x|$ 无限增大用记号 $x \to +\infty$ 表示.

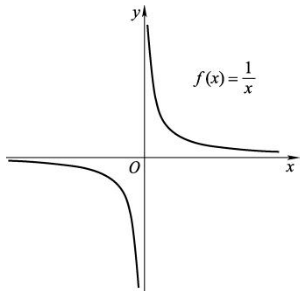
② x 无限接近 x_0 用记号 $x \to x_0$ 表示；

x 从 x_0 的左侧（即 $x < x_0$ ）无限接近 x_0 用记号 $x \to x_0^-$ 表示；

x 从 x_0 的右侧（即 $x > x_0$ ）无限接近 x_0 用记号 $x \to x_0^+$ 表示.

1）当 $x \to \infty$ 时，函数 $y = f(x)$ 的极限

例　作出函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的图形，在 $x > 0$ 的前提下，讨论当 $x \to +\infty$ 时，该函数的变化趋势，并说出它的极限.



当 x 沿 x 轴的正方向无限增大时，曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 无限接近于 x 轴，但始终不与 x 轴相交，故当 $x \to +\infty$ 时，函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 以 0 为极限.

定义 3　当 x 的绝对值无限增大，即 $x \to \infty$ 时，如果函数值 $f(x)$ 无限趋近于某一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \ (x \to \infty) .$$

例 **4**　讨论 $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ 是否存在.

解　有 $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ 及 $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$. 由于当 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时，函数 $\arctan x$ 不是无限接近于同一个确定的常数，所以 $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$ 不存在.

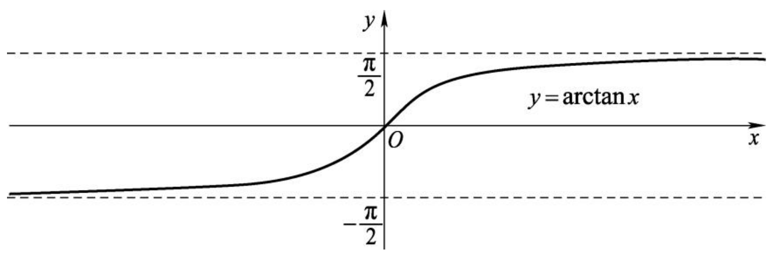


图 2-2

由上面的例子可以看出，如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 都存在并且相等，那么

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 也存在并且与它们相等．如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在，但不相等，那么 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在．

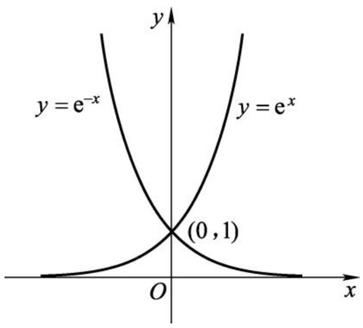
定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ **的充分必要条件是** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$．

例 讨论函数 $y=e^x$ 及 $y=e^{-x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限．

解 如图 2-3 所示为这两个函数的图形．

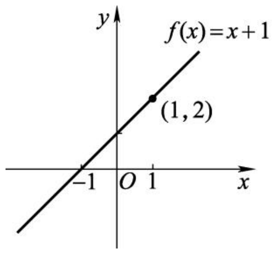
因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$ 不存在．

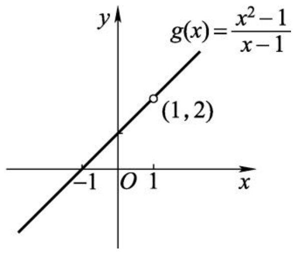
又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}$ 不存在．



2）当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

对于函数 $f(x)=x+1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的变化趋势如图所示．从图像容易看出，当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都无限接近于 2．





定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义（在 x_0 处可以无定义），如果存在一个常数 A，当 x 无限趋于 x_0 $(x\neq x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ \ (x\to x_0).$$

如果当 x 从 x_0 的左边趋于 x_0（通常记作 $x\to x_0^-$）时，$f(x)$ 无限接近某常数 A，则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$．

如果当 x 从 x_0 的右边趋于 x_0（通常记作 $x\to x_0^+$）时，$f(x)$ 无限接近某常

数 A，则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

左极限与右极限统称为单侧极限.

根据函数极限的定义并观察函数图像，我们可以确定一些常见函数的极限. 例如，$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$ (C为常数)，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ 不存在.

定理 **2**　当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限存在且都等于 A，即

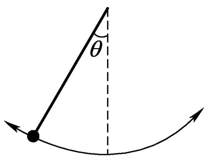
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

例　设 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\geqslant 1\\ 3x, & x<1\end{cases}$，试判断 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在.

设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x+1, & x<0.\end{cases}$ 讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在？

三、无穷小量与无穷大量

1、无穷小量



在实际中，我们经常遇到一类变量，它们的绝对值变得越来越小且趋向于零.

引例　单摆离开铅直位置的偏度用角 θ 来度量. 如果让单摆自己摆动，由于机械摩擦力和空气阻力，摆动幅度就会不断地减小，角 θ 逐渐趋向于零. 对于这种变量变化趋于零的情形，我们给出如下定义.

定义 **5**　在自变量 x 的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的极限为 0，即 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为该变化过程中的无穷小量，简称无穷小.

性质 1　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 2　有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 3　有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cos x$.

2、无穷大量

定义 **6**　在自变量 x 的某一变化过程中，若函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为该变化过程中的无穷大量，简称无穷大. 记 $\lim f(x)=\infty$.

例如，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 的绝对值无限增大，因此在这个变化过程中，$\dfrac{1}{x}$ 是

	无穷大量；当 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时，函数 $\tan x$ 是无穷大量；当 $x \to 2$ 时，$\frac{1}{x-2}$ 是无穷大量. 3、无穷大与无穷小的关系 定理 **3**　在自变量的同一变化过程中，无穷大、无穷小互为倒数关系，即如果 $\lim f(x)=0$ （或 ∞ ），则有 $\lim \frac{1}{f(x)}=\infty$ （或 0）. 例如，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x=\infty$ ，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0$.
归纳总结	1.极限的本质思想 2.极限的类型：数列极限、函数极限 3.数列和函数的区别和联系

《高职应用数学》教案 2

课程名称：高职应用数学

总学时：32

课程章节	2.2　极限的运算 2.3　两个重要极限	**课时分配**	2
教学目标	1.知识目标：掌握极限的四则运算中几种常见情况下极限的计算方法；了解无穷大、无穷小的概念；掌握两个无穷小阶数的高低；熟练掌握用等价无穷小代换及两个重要极限求极限。 2.能力目标：通过极限思想的领略，使学生认识生活中的无限接近的理论本质就是极限，提升学生的理论联系实际的能力，应用理论知识解决实际问题的能力，通过等价无穷小代换及重要极限求极限的方法，引导学生掌握类比的学习方法、等价代换的思想以及培养学生认识事物的整体意识。		
教学重点、难点	重点：极限的四则运算；运用等价无穷小和两个重要极限求函数的极限 难点：等价无穷小替换和两个重要极限求极限		
教学总体设计	1.复习旧课：提问学生对极限思想的认识或简单概述上节课的内容。 2.概念讲授：（1）学生总结极限的四则运算的计算法则；教师总结给予正确性的引导；教师给出典型题目，学生发挥想象思考讨论选择性的进行解答，表现突出的学生进行加分；教师引导式的讲解并总结题目类型和相应的解题方法。（2）直接给出无穷大、无穷小的概念并举例说明；陈述无穷小的性质和无穷大无穷小的关系；以问题引导式给出无穷小的比较的概念，举例对无穷小进行比较。（3）给出常见的等价无穷小并作如何在求极限中应用的使用说明，进而举例说明。（4）给出两个重要极限，重点引导学生掌握第二个重要极限的结构并举例用第二个重要极限求极限。 3.实操练习：每一个知识点讲解完之后的练习，包括极限的四则运算、无穷小		

	的比较、等价无穷小替换求极限以及使用第二个重要极限求极限。 4.归纳总结：极限的四则运算的几种常见情况；无穷大、无穷小的概念；无穷小的性质和比较；常见的等价无穷小替换求极限；两个重要极限。 5.布置作业：教材上涉及本节课的重点知识的习题。
教学过程	**2.2 极限的性质和运算法则** 一、极限的性质 定理 **1**（唯一性） 如果函数 $f(x)$ 在某一变化过程中有极限，则其极限唯一. 定理 **2**（有界性） 如果函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时存在极限，则必存在 x_0 的某一邻域，使得 $f(x)$ 在该邻域内有界. 定理**3**（保号性） 若在 x_0 的左右近旁，恒有 $f(x) \geqslant 0$ （或 $f(x) \leqslant 0$ ）且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$ （或 $A \leqslant 0$ ）. 二、极限的运算法则 定理 **4** 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则 （1） $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$； （2） $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$； （3） $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B} \ (B \neq 0)$. 推论 **1** 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = CA \ (C\text{为常数})$. 推论 **2** 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^n = A^n \ (n\text{为非负整数})$. 三、极限的求法 1、直接代入法 它适用于 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 点有定义，且 $g(x_0) \neq 0$. 方法： $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$ 注：此方法是求极限最基本、也是使用频率最高的方法之一. 例 1 求 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 7}$. 例 2 求 $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 2x + 6)$. 2、倒数法（$\dfrac{A}{0}$型）

它适用于 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中 $g(x_0)=0$，但 $f(x_0)\neq 0$，记为“$\dfrac{A}{0}$”型．方法：由直接代入法，先求其倒数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$，再由无穷大与无穷小的关系得 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$．

例 **3**　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2}{x-1}$．

3、分解因式，约去零因子法（$\dfrac{0}{0}$型）

它适用于 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中 $g(x_0)=0$ 且 $f(x_0)=0$，记为“$\dfrac{0}{0}$”型．方法：将分子或分母分解因式，约去共同的零因子，再用直接代入法．

例 **4**　求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}$．

4、分子或分母有理化，约去零因子法（$\dfrac{0}{0}$型）

它适用于 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中 $g(x_0)=0$ 且 $f(x_0)=0$，且分子或分母中含有根号，记为“$\dfrac{0}{0}$”型．方法：将分子或分母有根号的先有理化，约去共同的零因子，再用直接代入法．

例 **5**　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$．

5、公式法（无穷小分出法）（$\dfrac{\infty}{\infty}$型）

它适用于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，此时分子、分母都趋于 ∞，记为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型．方法：先将分子、分母同除 x 的最高次方，将分子、分母都转化成无穷小，于是有下面结论

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & \text{当 } n<m \text{ 时},\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } n>m \text{ 时}.\end{cases}$$

此结论只与分子、分母的最高方次 n，m 有关．

例 **6**　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+5}{5x^3+2x-7}$．

例 **7**　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x-3}{5x^3-x^2+4}$．

例 **8**　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-x^2+2x-1}{x^2+5x+4}$．

例 **9**　一个贮水池中有 5 000 L 的纯水，现将浓度为 30 g/L 的盐水以 25 L/min

的速度注入水池中，求：

（1）经过 t min 后水池中盐的浓度；

（2）随着时间的推移，池中盐的浓度将如何变化？

6、$\infty-\infty$ 型

它适用于 $\lim[f(x)-g(x)]$，其中 $\lim f(x)=\infty$ 且 $\lim g(x)=\infty$，记为“$\infty-\infty$”型．方法：先通分或先将分子有理化，就可以化成前面几种形式．

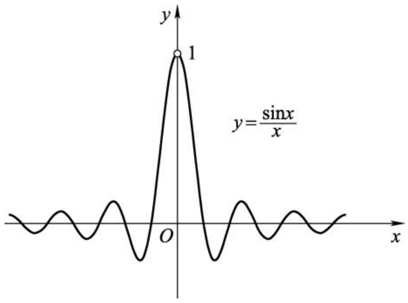
例 **10**　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$．

2.3 两个重要极限及无穷小的比较

一、两个重要极限

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

从图像可以观察出，当 $x\to 0$ 时，函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的值无限趋近于 1．



此重要极限属于“$\dfrac{0}{0}$”型，常形象地表示为

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1\ （\square代表同一变量）.$$

例 **1**　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$．

例 **2**　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$；　　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$．

2、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

当 $x\to\infty$ 时，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	$\cdots\to+\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.593 74	2.704 81	2.716 92	2.718 15	2.718 27	2.718 28	$\cdots\to\mathrm{e}$

x	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000	−1 000 000	$\cdots\to-\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.867 97	2.731 99	2.719 64	2.718 42	2.718 30	2.718 28	$\cdots\to\mathrm{e}$

从表中可以看出，当 $x\to-\infty$ 及 $x\to+\infty$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的值无限趋近于 $\mathrm{e}=2.718\ 28\cdots$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$．

如果令 $\dfrac{1}{x}=t$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to0$，因此公式还可以写成 $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$．

此重要极限属于“1^∞”型，常形象地表示为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}\text{ 或 }\lim_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$$（□代表同一变量）.

例 **3**　求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$．

例 **4**　设有本金 10 000 元，年利率为 6%，计息期五年，分别计算下列情况的本利和：

（1）单利计息（五年结算一次）；

（2）复利计息（3 个月结算一次）；

（3）连续复利计息.

二、无穷小的比较

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{x}{3x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to0}\frac{2x}{x}=2,\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

两个无穷小量比值极限的不同，反映了不同无穷小量趋于零的速度差异.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{x}=0$，说明当 $x\to0$ 时，$3x^2\to0$ 的速度比 $x\to0$ 要快；

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{3x^2}=\infty$，说明当 $x\to0$ 时，$x\to0$ 的速度比 $3x^2\to0$ 要慢；

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}=2$，说明当 $x\to0$ 时，$2x\to0$ 与 $x\to0$ 的速度相当；

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，说明当 $x\to0$ 时，$\sin x\to0$ 与 $x\to0$ 的速度相同.

定义　设 α,β 是自变量的同一变化过程中（$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$）的无穷小量，且 $\alpha\neq0$．

（1）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

	（2）若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小； （3）若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小； （4）若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$． 例如，当 $x\to 0$ 时，x^3+2x 与 x 都是无穷小量，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2)=2$．所以当 $x\to 0$ 时，x^3+2x 与 x 是同阶无穷小量． 等价无穷小在求极限时有重要的作用．对此，有如下定理： 定理　设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则有 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$． 这说明，在求两个无穷小之比的极限时，分子、分母可分别用它们的等价无穷小代替，这样可以简化某些极限的运算．因此，我们应该记住以下几个常用的等价无穷小． 当 $x\to 0$ 时， $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$， $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$． **例 5**　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3-4x}$． **例 6**　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$．
归纳总结	1.极限的四则运算的常见的几种题型和解题方法； 2.无穷大、无穷小的概念，无穷小的性质； 3.无穷小的比较； 4.等价无穷小代换求极限； 5.两个重要极限。

《高职应用数学》教案 3

课程名称：高职应用数学

总学时：32

课程章节	2.4　函数的连续性	**课时分配**	2
教学目标	1.掌握函数在某点处连续的含义		

<table>
<tr><td></td><td>2.熟练掌握函数在某点处连续性的判断
3.掌握函数在某点处间断的含义</td></tr>
<tr><td>教学重点、难点</td><td>重点：函数连续的定义
难点：判断函数在某点处的连续性</td></tr>
<tr><td>教学总体设计</td><td>1.复习旧课；2.引入新课；3.构建概念；4 实际应用；5.归纳总结；6.布置作业</td></tr>
<tr><td>教学过程</td><td>

2.4 函数的连续性

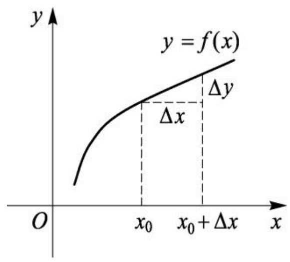
一、连续函数的概念

1、函数的增量

自变量从初值 x_0 变为终值 x 时，终值与初值的差 $x-x_0$ 称为自变量 x 的增量（通常也称为改变量），记作 Δx．增量 Δx 可正可负．

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在该领域内由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，称 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数的增量（或改变量），记作 Δy 或 $\Delta f(x)$，则有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\ .$$



2、函数连续的定义

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处的改变量 Δx 趋于零时，相应地函数的改变量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0\,,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续．

在定义 1 中，如果令 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x\to 0$ 即为 $x\to x_0$，$\Delta y\to 0$ 即为 $f(x)\to f(x_0)$，因此，函数在点 x_0 处的连续性也可叙述为：

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限存在且等于函数在点 x_0 处的函数值，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\,,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续．

由函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左极限、右极限的定义可以得到函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是左连续与右连续的定义．

定义 3　若 $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是左连续．若

</td></tr>
</table>

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处是右连续.

定义 **4**　若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内各点处均连续，则称 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续. 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，且在 $x = a$ 处右连续，在 $x = b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

例 **1**　讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leqslant 0, \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

根据连续函数的定义，通过上述例子，总结出 $f(x)$ 在点 x_0 处连续需满足下列三个条件：

（1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义；

（2）函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

二、函数的间断点

定义 **5**　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果函数 $y = f(x)$ 有下列三种情形之一：

（1）在 $x = x_0$ 处没定义；

（2）在 $x = x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）在 $x = x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续或间断，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

例 **2**　讨论函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

设点 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

（1）若左极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 其中

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，则点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点；

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，则点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

（2）若左极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 两者之中至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点. 其中，当 $x \to x_0$ 时，若 $f(x)$ 为无穷大量，则这种类型的间断点也称为无穷间断点.

《高职应用数学》教案 4

课程名称：高职应用数学
总学时：32

课程章节	3.1 导数的概念	**课时分配**	2
教学目标	1. 掌握导数的概念 2. 会用导数的定义求导 3. 了解导数的几何意义		
教学重点、难点	重点：1.导数的两个等价概念；2.导数的几何意义；3.可导和连续之间的关系 难点：1.用导数的定义求导；2.导数几何意义的应用（求函数在某点处的切线方程和法线方程）		
教学总体设计	1. 引例 1：从物理的角度，对平均速度取极限，得到瞬时速度 2. 引例 2：从几何的角度，由曲线的割线取极限，得到曲线在某点处的切线 3. 根据两个引例，总结得出导数的定义 4. 对于分段函数分段点处的导数，引入左导数和右导数的概念 5. 返回引例 1，讨论总结处导数的几何意义，并用几何意义求函数在某点处的切线方程和法线方程 6. 逻辑推导可导和连续之间的关系		

教学过程

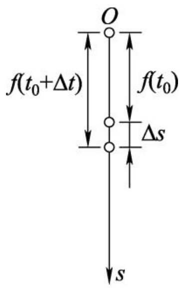
3.1 导数的概念

一、引例分析

引例　自由落体的瞬时速度

$$s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为常量．试求物体在 t_0 时刻的瞬时速度 v．



给定时间变量 t 在 t_0 时的一个增量 Δt，则在从时刻 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间间隔内，物体运动路程的增量为

$$\begin{aligned}\Delta s&=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)\\&=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2\\&=gt_0\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2,\end{aligned}$$

从而求得物体在时间段 Δt 内的平均速度为

$$\overline{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\,\Delta t.$$

显然，当 $|\Delta t|$ 无限变小时，平均速度 $\overline{v}$ 无限接近于物体在 t_0 时刻的瞬时速度

v．因此，平均速度的极限值就是物体在 t_0 时刻的瞬时速度 v，即可定义

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[gt_0+\frac{1}{2}g\,\Delta t\right]=gt_0.$$

二、定义

定义 **1**　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处及其左右近旁有定义，当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 Δx 之比的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作

$$f'(x_0)，\quad y'\big|_{x=x_0}\quad 或\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}，\quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}，$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

导数的定义式还有下列两种形式：

（1）令 $h=\Delta x$，得 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$；

（2）令 $x=x_0+\Delta x$，得 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

定义 **2**　如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导．这时，对于任意一个 $x\in(a,b)$，都有一个确定的导数值 $f'(x)$ 与之对应，这样就构成了一个新函数 $f'(x)$，称 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，简称导数，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

也可记作

$$y'，\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}，\quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

三、求导数举例

由导数定义可知，求函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 可按以下三个步骤进行：

（1）求函数增量：$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$；

（2）计算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$；

（3）求极限：$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

例 **1**　求函数 $y = C$（C 为常数）的导数.

例 **2**　求函数 $y = x^2$ 的导数.

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}\text{（}\alpha\text{ 为任意实数）.}$$

例 **3**　求下列函数的导数：

（1）$y = \dfrac{1}{x}$；　　　　（2）$y = \sqrt{x}$.

例 **4**　求函数 $y = \sin x$ 的导数.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

$(a^x)' = a^x \ln a$. 特别地，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e} = \dfrac{1}{x\ln a}$. 特别地，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

例 **5**　求下列函数在指定点处的导数：

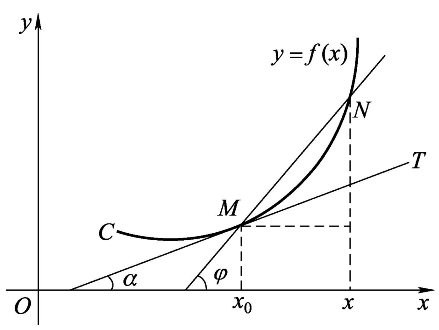
（1）$y = \cos x$，$x = \dfrac{\pi}{2}$；　　　　（2）$y = 2^x$，$x = 1$.

四、用导数表示实际量——变化率模型

案例 **1**　切线的斜率

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处有切线且斜率存在，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率.

在曲线上另取一点 N，设它的坐标为 $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$，如图 3-3 所示.



当割线 MN 上的 N 点沿着曲线无限接近 M 点时，割线 MN 的极限位置称为曲线在 M 点的切线. 设割线 MN 的倾角为 φ，切线 MT 倾角为 α，则割线 MN 斜率为

$$k_{MN}=\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

显然当$\Delta x\to 0$时，即点N将沿着曲线趋近于M点时，割线MN趋近于极限位置MT（即切线MT）．于是得到切线MT的斜率为

$$k_{MT}=\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

这就是说，函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$在几何上表示曲线$y=f(x)$在点$M\ (x_0, f(x_0))$处切线的斜率．

由直线的点斜式方程可以得到：

（1）曲线$y=f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

（2）过切点$M(x_0, f(x_0))$且与切线垂直的直线称为曲线$y=f(x)$在点M处的法线．如果$f'(x_0)\neq 0$，则法线斜率为$-\dfrac{1}{f'(x_0)}$，所以曲线$y=f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

例 **6**　求曲线$y=x^3$在点$(2, 8)$处的切线斜率，并写出该点处的切线方程和法线方程．

解　由导数的几何意义可知，所求的切线斜率为

$$k=y'\big|_{x=2}=3x^2\big|_{x=2}=12,$$

从而所求的切线方程为

$$y-8=12(x-2),$$

即

$$12x-y-16=0.$$

所求法线的斜率为

$$-\frac{1}{k}=-\frac{1}{12},$$

于是所求的法线方程为

$$y-8=-\frac{1}{12}(x-2),$$

即

$$x+12y-98=0.$$

案例 **2**　速度、加速度

由引例可知，若物体的运动方程为$s=s(t)$，则物体在时刻t的瞬时速度为

	$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t).$$ 因为加速度（描述速度变化的快慢程度）是速度关于时间的变化率，所以物体在时刻t的加速度为 $$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t).$$ 案例 **3**　电流强度 电路中电荷的定向移动形成电流，通过导体横截面的电荷量Q与所用时间t之比称为电流强度，简称电流i．如果导体内的电荷随时间变化的函数为$Q=Q(t)$，那么该导体在时间段$[t,t+\Delta t]$内的平均电流为$i=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$，在时刻$t$的电流为$i=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}$． 五、函数的可导性与连续性的关系 定理　如果函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则函数$y=f(x)$一定在点x_0处连续. 例 **7**　证明函数$y=\sqrt[3]{x^2}$在$x=0$处连续，但在$x=0$处不可导.
归纳总结	1. 函数在一点处可导定义式 2. 导数的意义：物理意义和几何意义 3. 导函数的定义式 4. 函数在一点处可导与连续的关系

《高职应用数学》教案 5

课程名称：高职应用数学
总学时：32

课程章节	3.2　导数的求导法则 3.3　高阶导数	**课时分配**	2
教学目标	1. 用导数的定义推导基本初等函数的导数公式 2. 掌握导数的四则运算，会对初等函数及复合函数进行求导 3. 掌握初等函数的求导法则 4. 掌握高阶导数的概念		
教学重点、难点	重点：1.基本初等函数的导数公式；2.导数的四则运算；3.复合函数的求导公式 难点：1.导数的四则运算；2.复合函数求导；3.求函数的高阶导数		

教学总体设计	1. 用导数的定义推导出基本初等函数的导数公式 2. 用导数的定义证明推导出导数的四则运算
教学过程	**3.2 导数的运算** 一、导数的基本公式 （1）$(C)'=0$；（2）$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$； （3）$(a^x)'=a^x\ln a$；（4）$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$； （5）$(\log_a{}^x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；（6）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$； （7）$(\sin x)'=\cos x$；（8）$(\cos x)'=-\sin x$； （9）$(\tan x)'=\sec^2 x$；（10）$(\cot x)'=-\csc^2 x$； （11）$(\sec x)'=\sec x\tan x$；（12）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$； （13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$； （15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；（16）$(\mathrm{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$． 二、导数的四则运算法则 设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 在点 x 处可导，则 $u(x)\pm v(x)$，$u(x)\cdot v(x)$，$\dfrac{u(x)}{v(x)}(v(x)\neq 0)$ 在点 x 处也可导，且有下列法则： （1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$； （2）$(uv)'=u'v+uv'$；

（3）$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\,(v \neq 0)$.

特例：$(Cu)' = Cu'\,(C\text{为常数})$.

例 1　求下列函数的导数：

（1）$y = 3x^2 - 2x + 1$；　　（2）$y = \dfrac{2}{x} + 3\cos x - \mathrm{e}^x$；

（3）$y = (x^2 + 1)\ln x$；　　（4）$y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

例 2　设函数 $y = \tan x$，证明 $y' = \sec^2 x$.

例 3　设函数 $y = x\tan x - 2\sec x$，求 y'.

三、复合函数的求导法则

设 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y = f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x 处也可导，并且

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 或 $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

或记为　　$y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

两个可导函数的复合函数对自变量的导数，等于复合函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数.

本法则可推广到有限次复合的情形，例如，设函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(v)$，$v = \psi(x)$，则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

例 4　设函数 $y = \sin 2x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

例 5　设函数 $y=\sqrt{x^2+1}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

例 6　设函数 $y=\cos(3x+1)$，求 y'．

例 7　设函数 $y=\ln(x^2-1)$，求 y'

例 8　设函数 $y=x\sqrt{1-x}$，求 y'．

3.3 高阶导数

一、高阶导数的定义

定义　若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，则称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作

$$y'',\ f''(x),\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}.$$

类似地，二阶导数 y'' 的导数称为函数 $f(x)$ 的三阶导数，记为 y'''；三阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的四阶导数，记为 $y^{(4)}$，……，$(n-1)$ 阶导数 $y^{(n-1)}$ 的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数，记作 $y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$，$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}$．

二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.

相应地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的一阶导数.

二、高阶导数的计算

例 1　设函数 $y=x^4+x^3-x^2+1$，求 y''．

	例 2　设函数 $y=\sin^2 x$，求 y''． 例 3　设函数 $y=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$，求 y''． 例 4　设函数 $y=\mathrm{e}^x$，求 $y^{(n)}$． $y^{(n)}=(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x \quad n=1,2,3,\cdots$ 例 5　设函数 $y=\ln(x-1)\ (x>1)$，求 $y^{(n)}$． $y^{(n)}=[\ln(x-1)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x-1)^n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$． 例 6　设一物体的运动方程为 $s=A\sin\dfrac{\pi t}{3}$，求物体在 $t=1$ 时刻的速度和加速度．
归纳总结	1. 求导的四则运算法则 2. 复合函数求导的法则 3. 高阶导数的定义

《高职应用数学》教案 6

课程名称：高职应用数学

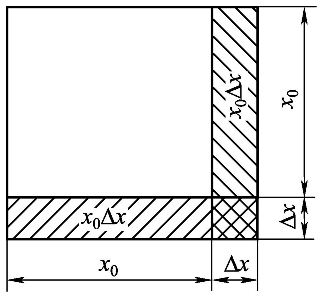
总学时：32

课程章节	3.4　函数的微分及其应用	**课时分配**	2
教学目标	1. 理解微分的概念 2. 理解导数与微分的关系		
教学重点、难点	重点：理解微分的概念，掌握微分计算 难点：了解微分的简单应用，掌握近似计算		
教学总体设计	1. 以近似计算实例引入微分的概念 2. 以公式和图形相结合的方式描述微分的定义，与几何意义 3. 应用问题举例		

教学过程

3.4　函数的微分及其应用

一、微分的概念



一块正方形的金属薄片，当受热膨胀后，边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$．问此薄片的面积 A 增加了多少？

由于正方形的面积 A 是边长 x_0 的函数，即 $A=x_0^2$，所以当边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，面积的增量 ΔA 为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-{x_0}^2=2x_0\Delta x+\Delta x^2 .$$

从上式可以看出，ΔA 由两部分组成，第一部分是 $2x_0\Delta x$，即图中带有斜线的两个矩形面积之和，它是 Δx 的线性函数；第二部分是 Δx^2，即图中带有交叉斜线的小正方形面积．当 $|\Delta x|$ 很小时，Δx^2 是比 Δx 高阶的无穷小，面积的增量 ΔA 可以用 $2x_0\Delta x$ 近似表示，即

$$\Delta A\approx 2x_0\Delta x,$$

因为 $2x_0=(x^2)'\big|_{x=x_0}=A'(x_0)$，所以

$$\Delta A\approx A'(x_0)\Delta x$$

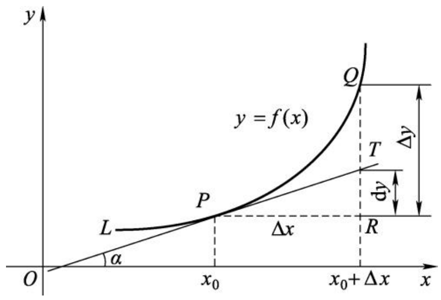
一般地，对于函数 $y=f(x)$，当自变量从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的增量可表示为

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x) .$$

第一项中 $f'(x_0)$ 是不依赖 Δx 的常数，第二项 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小．因此，当 $|\Delta x|$ 很小时，Δy 的近似值表示为

$$\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x ,$$

称 $f'(x_0)\Delta x$ 为 Δy 的线性主部，由此给出微分的定义．

	定义　如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处具有导数 $f'(x_0)$，则称 $f'(x_0)\Delta x$ 为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$. 通常把自变量的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\Delta x=\mathrm{d}x$．则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分可写成 $$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x.$$ 当函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有微分时，称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微. 一般地，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内任意点 x 的微分称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$ 由 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，得 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$ 由此可见，函数的微分与自变量的微分之商等于该函数的导数．因此导数也称微商. 例 **1**　求函数 $y=x^3$ 在 $x=1$，$\Delta x=0.01$ 时的改变量 Δy 及微分 $\mathrm{d}y$. 例 **2**　设 $y=\ln(1+x)$，求 $\mathrm{d}y$. 二、微分的几何意义  点 $P(x_0,y_0)$ 和 $Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上邻近的两点．PT 为曲线在点 P 处的切线，其倾斜角为 α．容易得到 $RT=PR\tan\alpha=\Delta x f'(x_0)=\mathrm{d}y$．这就是说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处切线 PT 的纵坐标的增量 RT. $TQ=RQ-TR$ 表示 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 之差，当 $\|\Delta x\|$ 很小时，TQ 与 RT 相比是微不足道的，因此，可用 RT 近似代替 RQ．这就是说，当 $\|\Delta x\|$ 很小时，有 $\Delta y\approx\mathrm{d}y$．因

此在点 P 的附近，可以用切线段来近似代替曲线段，即

$$\overset{\frown}{PQ} \approx |PT| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}\ .$$

三、微分的运算

1、微分的基本公式

（1） $\mathrm{d}(C) = 0$； （2） $\mathrm{d}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$；

（3） $\mathrm{d}(a^x) = a^x \ln a\mathrm{d}x$； （4） $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

（5） $\mathrm{d}(\log_a x) = \dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$； （6） $\mathrm{d}(\ln x) = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；

（7） $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x$； （8） $\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\mathrm{d}x$；

（9） $\mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\mathrm{d}x$； （10） $\mathrm{d}(\cot x) = -\csc^2 x\mathrm{d}x$；

（11） $\mathrm{d}(\sec x) = \sec x\tan x\mathrm{d}x$； （12） $\mathrm{d}(\csc x) = -\csc x\cot x\mathrm{d}x$；

（13） $\mathrm{d}(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$； （14） $\mathrm{d}(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（15） $\mathrm{d}(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$； （16） $\mathrm{d}(\mathrm{arc}\cot x) = -\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2、函数和、差、积、商的微分法则

设 u， v 都是 x 的可微函数， C 为常数，则

（1） $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$；

（2） $\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$；

（3） $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$；

（4） $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}\quad (v \neq 0)$.

根据微分的定义，有

$$\mathrm{d}(uv) = (uv)'\mathrm{d}x = (u'v + uv')\mathrm{d}x = u'v\mathrm{d}x + uv'\mathrm{d}x = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v\ .$$

3、微分形式的不变性

由微分的定义知，当 u 是自变量时，函数 $y = f(u)$ 的微分是

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u\ .$$

如果 u 不是自变量而是 x 的可微函数 $u = \varphi(x)$，那么对于复合函数 $y = f[\varphi(x)]$，根据微分的定义和复合函数的求导法则，有

$$\mathrm{d}y = y'_x\mathrm{d}x = f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x\ .$$

其中 $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$，所以上式仍可写成

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u\ .$$

由此可见，不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y = f(u)$ 的微分总是同一个形式： $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$，此性质称为微分形式的不变性.

	例 **3**　设函数 $y=\sin(1+2x^3)$，求 $\mathrm{d}y$. 例 **4**　求函 $y=\dfrac{1-t}{1+t}$ 的微分 $\mathrm{d}y$. 四、微分在近似计算中的应用 1、计算函数增量的近似值 当 $\lvert\Delta x\rvert$ 很小时，可得 $$\Delta y\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x .$$ 例 **5**　半径为 10 cm 的金属圆片加热后，半径伸长了 0.05 cm，问圆片面积改变了多少？ 2、计算函数值的近似值 当 $\lvert\Delta x\rvert$ 很小时，由式（3-1）可得： $$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x .$$ 在上面公式中令 $x_0=0$， $\Delta x=x$（当 $\lvert x\rvert$ 很小时）可得 $$f(x)\approx f(0)+f'(0)x .$$ 例 **6**　计算 $\sin 45°30'$ 的近似值. 例 **7**　证明：当 $\lvert x\rvert$ 较小时，$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$. （1）$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$；（2）$\sin x\approx x$；（3）$\tan x\approx x$； （4）$\ln(1+x)\approx x$；（5）$\mathrm{e}^x\approx 1+x$；（6）$\arcsin x\approx x$. 例 **8**　计算 $\sqrt[3]{1.03}$ 的近似值. 例 **9**　求 $\mathrm{e}^{-0.001}$ 的近似值.
归纳总结	1. 微分的意义 2. 微分的运算